Institut Galilée *CP2I2*
Département de Mathématiques Année 2013-2014

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Introduction

Qu'est-ce qu'est une série ?
Est-ce qu'il a du sens de sommer une infinité de termes ?
Exemple du segment (puissances de 1/2)

1.2 Séries numériques

Notation. $\mathbb{K}$ dénote soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$. Les résultats énoncés dans $\mathbb{K}$ sont vrais à la fois dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
Definition. On appelle série à termes dans $\mathbb{K}$ (par simplicité parfois on dira seulement série de $\mathbb{K}$) tout couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de suites de $\mathbb{K}$ t.q. $\forall n \in \mathbb{N}\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
On appelle u_n le n-iéme terme général de la série et S_n la n-iéme somme partielle.
Remarque. Puisque $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit à déterminer la série. On notera $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\geq 0} u_n$.
Remarque. Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors on peut définir

$$v_n = \begin{cases} 0 & si\ n < n_0, \\ u_n & si\ n \geq n_0. \end{cases}$$

On notera $\sum_{n\geq n_0} u_n = \sum_{n\geq 0} v_n$. Dans ce cas la n-iéme somme partielle est $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Proposition 1.2.1. *L'ensemble des séries à termes dans $\mathbb{K}$ est muni d'une structure d'espace vectoriel par la loi*

$$\lambda \sum_{n\geq 0} u_n + \mu \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n), \tag{1.1}$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont des séries dans $\mathbb{K}$. On notera $\mathcal{S}(\mathbb{K})$ cet espace vectoriel.

Démonstration. Admise. □

1.3 Séries convergentes

Définition. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est convergente lorsque la suite S_n converge.
On notera alors $S = \sum_{k=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$. On écrira parfois $\sum_{n\geq 0} u_n < \infty$.
De la même façon, $\sum_{n=n_0}^{\infty}$ est la somme d'une série convergente $\sum_{n\geq n_0} u_n$.
Définition. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans $\mathbb{K}$ est divergente lorsque elle n'est pas convergente.
Définition. On dit que deux séries à termes dans $\mathbb{K}$ ont même nature si les deux à la fois divergent ou à la fois convergent. (c'est à dire, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente ssi $\sum_{n\geq 0} v_n$ est convergente).

Théorème 1.3.1. *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{K}$ et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} v_n$ ont même nature. Si elles convergent, on a $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + S'_n.$$

Donc S_n converge ssi S'_n converge, et dans ce cas

$$\lim_n S_n = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \lim_n S'_n.$$

□

Théorème 1.3.2. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries convergentes de $\mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors $\sum_{n\geq 0}(u_n+v_n)$ et $\sum_{n\geq 0} \mu u_n$ convergent. De plus $\sum_{k=0}^{\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k + \sum_{k=0}^{\infty} v_k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \mu u_k = \mu \sum_{k=0}^{\infty} u_k$.*

Démonstration. $\sum_{k=0}^{n}(u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=0}^{n} v_k$ et $\sum_{k=0}^{n} \mu u_k = \mu \sum_{k=0}^{n} u_k$ par commutativité de l'addition et distributivité dans $\mathbb{K}$. On obtient le résultat par passage à la limite. □

Définition. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente de $\mathbb{K}$. On appelle n-ième reste (de Cauchy) de la série le scalaire $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Proposition 1.3.3. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $R_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. $S = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} = S_n + R_n$. Donc

$$\lim_n R_n = S - \lim_n S_n = S - S = 0.$$

□

Proposition 1.3.4. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. $\lim_n u_n = \lim_n (S_{n+1} - S_n) = 0$. □

Corollaire 1.3.5. *Si $u_n \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. On dira dans ce cas que $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge grossièrement.*

Exemple. $u_n \equiv 1$.
Remarque. Le contraire n'est pas vrai : il existe des séries $\sum_{n\geq 0}$ divergentes telles que $u_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.
Exemple : Série harmonique.
Exemple : Séries géométriques.
Définition. On dit série géométrique une série de la forme $\sum_{n\geq n_0} az^n$ où $a \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.

Théorème 1.3.6. *Soit $z \in \mathbb{C}$. $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge ssi $|z| < 1$. Dans ce cas $\sum_{k=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.*

Démonstration. On a besoin du lemme suivant

Lemme 1.3.7. *Soit $1 \neq z \in \mathbb{C}$. Alors $\sum_{k=n}^{p} z^k = \frac{z^n - z^{p+1}}{1-z}$.*

Démonstration. Il suffit de développer $(1 - z) \sum_{k=n}^{p} z^k$. Tous les termes se simplifient, sauf le premier et le dernier. □

On revient à la démonstration du théorème.
Si $|z| \geq 1$ alors $\sum_{n\geq 0} z^n$ diverge grossièrement.
Si $|z| < 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \to \frac{1}{1-z}$ lorsque $n \to \infty$. □

Remarque. $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k = z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0$ lorsque $n \to \infty$ ssi $|z| < 1$.

Proposition 1.3.8. *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{K}$ converge ssi la série $\sum_{n \geq n_0} (u_n - u_{n+1})$ converge. Dans ce cas*

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_n - u_{n+1}) = u_{n_0} - \lim_n u_n.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=n_0}^{n} (u_k - u_{k+1}) \\
&= (u_{n_0} - u_{n_0+1}) + (u_{n_0+1} - u_{n_0+2}) + (u_{n_0+2} - u_{n_0+3}) + \cdots + (u_n - u_{n+1}) \\
&= u_{n_0} + (-u_{n_0+1} + u_{n_0+1}) + (-u_{n_0+2} + u_{n_0+2}) + \cdots + (-u_n + u_n) - u_{n+1} \\
&= u_{n_0} - u_{n+1}.
\end{aligned}$$

On peut conclure par passage à la limite. □

Définition. On dit que $\sum_{n \geq n_0} u_n$ est une série télescopique lorsqu'il existe une suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ de $\mathbb{K}$ t.q. $u_n = v_n - v_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.
Exemple. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$.
Remarque. En général on ne peut pas écrire $\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_n - u_{n+1}) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_n - \sum_{k=n_0}^{\infty} u_{n+1}$. Par exemple, dans l'exemple précédent $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 1.3.9 (Critère de Cauchy pour les séries)**.** *Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$. Condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge est que $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n \geq N$ on ait $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \epsilon$.*

Démonstration. En effet $\sum_{k=n+1}^{m} u_k = S_m - S_n$. Le résultat découle du critère de Cauchy pour les suites. □

Définition. On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ de $\mathbb{K}$ est absolument convergente si $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

Théorème 1.3.10. *Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle converge.*

Démonstration. Si $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge, alors par le critère de Cauchy $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $m > n \geq N$ on a $\left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k|\right| \leq \epsilon$. Mais $\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |u_k| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} |u_k|\right|$. Donc aussi la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ satisfait le critère de Cauchy, et elle est donc convergente. □

1.4 Séries à termes positifs

Définition. Une série $\sum_{n \geq n_0}$ est dite à termes (réels) positifs (TRP) si $u_n \in [0, +\infty[\subset \mathbb{R}$ pour tout $n \geq n_0$.
Remarque. Dans ce cas $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geq S_n$, donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante.

Théorème 1.4.1. *Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à TRP. Alors elle converge ssi $\exists M > 0$ t.q. $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$ pour tout $n \geq 0$.*

Démonstration. S_n est une suite croissante, donc elle converge ssi elle est majorée. □

Corollaire 1.4.2. *Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à TRP divergente. Alors $\lim_n S_n = +\infty$.*

Théorème 1.4.3 (Critère de comparaison)**.** *Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à TRP. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $v_n \geq u_n$ pour tout $n \geq N$.*

1. *Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.*
2. *Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.*

Démonstration. 2) est la contreposée de 1). Pour démontrer 1) on observe que

$$\sum_{k=N}^{n} u_k \leq \sum_{k=N}^{n} v_k \leq \sum_{k=N}^{\infty} v_k \in [0, +\infty[.$$

Donc $\left(\sum_{k=N}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée, donc convergente. On peut conclure grâce au Théorème 1.3.1. □

Exemple. $u_n = \left(\frac{1}{2+\sin^2(n)}\right)^n$.
Remarque. Grâce au Théorème 1.3.2, le Théorème 1.4.3 reste valide si on suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $0 < C \in \mathbb{R}$ t.q. $u_n \leq Cv_n$ pour tout $n \geq N$. En particulier si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série de $\mathbb{K}$, $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série à TRP convergente et $u_n = O(v_n)$ lorsque $n \to \infty$ (ou $u_n = o(v_n)$ lorsque $n \to \infty$), alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Théorème 1.4.4 (Équivalence)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à TRP. Si $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to \infty$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ ont même nature.*

Démonstration. Par hypothèse il existe une suite réelle $(\alpha_n)_{n\in N}$ telle que $u_n = \alpha_n v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_n \alpha_n = 1$. Par conséquant il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$

$$0 < \tfrac{1}{2} v_n < u_n = \alpha_n v_n < 2v_n.$$

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ est série à TRP et par comparaison elle converge ssi $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge. □

Exemple. $u_n = e^{1/n} - 1$.

Théorème 1.4.5. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs.*

1. *S'il existe $K \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
2. *S'il existe $K \in]1,+\infty[$ et $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq K$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*

Corollaire 1.4.6 (Règle de D'Alambert)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty]$.*

1. *Si $l < 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.*
2. *Si $l > 1$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*

Remarque. Comme on le verra, en général on ne peut rien déduire lorsque $l = 1$.

Démonstration. 1) Pour tout $n \geq N$ on a

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot u_N \leq K^{n-N+1} u_N = K^n K^{1-N} u_N.$$

Comme $K < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} K^n$ converge, donc même $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge par comparaison.
2) Pour tout $n \geq N$ on a

$$u_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{u_{N+1}}{u_N} \cdot u_N \geq K^{n-N+1} u_N = K^n K^{1-N} u_N.$$

Comme $K > 1$, la série $\sum_{n\geq 0} K^n$ diverge, donc même $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge par comparaison. □

Exemple. $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

Séries de Riemann

Soit $a \in \mathbb{R}$. On se propose d'étudier la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$.
- Soit $a \leq 0$. Alors $\frac{1}{n^a} \geq 1$. Par comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ diverge grossièrement.
- Soit $a > 0$. On considère $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = t^{-a}$. On observe que pour tout $n \leq t \leq n+1$ on a $\frac{1}{n^a} \geq f(t) \geq \frac{1}{(n+1)^a}$. D'où

$$\frac{1}{n^a} = \int_n^{n+1} \frac{1}{n^a} dt \geq \int_n^{n+1} f(t)dt \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{(n+1)^a} dt = \frac{1}{(n+1)^a}.$$

Par équivalence, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n+1)^a}$ ont même nature, donc par comparaison $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge ssi $\sum_{n\geq 1} \int_n^{n+1} f(t)dt$ converge, mais

$$\sum_{k=1}^{p} \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_1^{p+1} f(t)dt = \begin{cases} \ln(p+1), & si\ a = 1 \\ \frac{1}{1-a}\left((p+1)^{1-a} - 1\right), & si\ a \neq 1. \end{cases}$$

Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge ssi $a > 1$.

Remarque. La règle de D'Alambert est inutile lorsque $u_{n+1}/u_n \to 1$. Exemple des séries de Riemann.

Théorème 1.4.7. *Soit $\sum_{n\geq 0} v_n$ une série à TRP et $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{K}$. Supposons que $u_n = o(v_n)$ lorsque $n \to \infty$.*

1. *Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ diverge, alors $S_n(u) = \sum_{k=0}^n u_k = o(S_n(v)) = o\left(\sum_{k=0}^n v_n\right)$.*
2. *Si $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge, alors $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^\infty u_k = o(R_n(v)) = o\left(\sum_{k=n+1}^\infty v_n\right)$.*

Remarque. Ce résultat reste vrai si on remplace o avec O ou $\sim$.

Démonstration. 1) $\forall \epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $u_n \leq \frac{\epsilon}{2} v_n$. Donc pour tout $p > m \geq N$ on a $\sum_{k=m}^p u_k \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=n}^p v_k$. Comme les séries divergent, il existe $P \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{\epsilon}{2} \sum_{k=N}^P v_k > \sum_{k=0}^{N-1} u_k$. Donc $\forall p > P$

$$\sum_{k=0}^p u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^P u_k + \sum_{k=P+1}^p u_k \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=N}^P v_k + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=N}^P v_k + \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=P+1}^p v_k \leq \epsilon \sum_{k=0}^p v_k.$$

2) Admise. □

Théorème 1.4.8 (Lemme de Cesaro)**.** 1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$ qui converge vers $L \in \mathbb{K}$. Alors $v_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \to L$ lorsque $n \to \infty$.*

2. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$ qui diverge vers $+\infty$. Alors $v_n := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. 1) $u_n \to L$ lorsque $n \to \infty$ donc $u_n - L =_{n\to\infty} o(1)$. Puisque $\sum_{n\geq 0} 1$ diverge on a par le théorème précédent que $\sum_{k=0}^n (u_k - L) =_{n\to\infty} o(\sum_{k=0}^n 1)$, c'est à dire, $\sum_{k=0}^n u_k - (n+1)L =_{n\to\infty} o(n+1)$, ce qui implique

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k - L =_{n\to\infty} o(1).$$

2) Admise. □

1.5 Séries alternées

Définition. Une série réelle $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite alternée si $u_n u_{n+1} \leq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Remarque. $\sum_{n\geq 0} u_n$ est alterenée ssi $(-1)^n u_n$ est de signe constante.

Théorème 1.5.1 (Critère de Leibniz ou des séries alternées)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de $\mathbb{R}$ telle que*
- *$\sum_{n\geq 0} u_n$ est alternée.*

– *La suite* $(|u_n|)_n$ *est décroissante.*
– $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge.*
De plus

1. $|R_n| \leq |u_{n+1}|$
2. $S = \sum_{n\geq 0} u_n$ *et* u_0 *ont le même signe.*
3. *Si* $S \geq 0$*, alors* $0 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. On considère le cas où $(-1)^n u_n \geq 0$ pour tout n, l'autre cas étant similaire.

– $S_{2n+2} - S_{2n} = u_{2n+2} + u_{2n+1} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+1}| \leq 0$, donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
– $S_{2n+3} - S_{2n+1} = u_{2n+3} + u_{2n+2} = |u_{2n+2}| - |u_{2n+3}| \geq 0$, donc $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
– $S_{2n} - S_{2n+1} = |u_{2n+1}| \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Donc $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes : elles convergent et elles ont une même limite S.
Or, $\forall \epsilon > 0$

– il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_1$ $|S_{2n} - S| \leq \epsilon$,
– il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_2$ $|S_{2n+1} - S| \leq \epsilon$.

En particulier $\forall n \geq 2\max\{N_1, N_2\}$, $|S_n - S| \leq \epsilon$.
De plus $0 \leq S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$, ce qui implique que $|R_n| = |S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = |u_n|$. □

Exemple. $\sum_{n\geq 1}(-1)^n n^{-a}$.
Remarque. La réciproque est fausse. Soit $u_n = n^{-2}$ si n pair et $u_n = n^{-3}$ si n impair. Alors $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, mais elle ne satisfait pas Leibniz.
Quelques méthodes.
Exemple 1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $|v_n| = |u_2 n + u_{2n+1}| \sim (2n)^{-2}$. Donc S_{2n+1} et $S_{2n} = S_{2n+1} - u_{2n+1}$ convergent à S.
Exemple 2. $u_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$. $v_n = u_{3n} + u_{3n+1} + u_{3n+2}$.
Exemple 3. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(1/n)\right]$. Divergence par l'absurde.

1.6 Produit de Cauchy

Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}$. Le produit de Cauchy de u et v, dénoté $u * v$ est la suite $w = u * v$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j\in\mathbb{N}}} u_i v_j$$

Théorème 1.6.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries de* $\mathbb{K}$ *absolument convergentes. Alors la série* $\sum_{n\geq 0}(u*v)_n = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ *est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(u*v)_n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} u_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} v_j\right).$$

Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

On va considérer des suites de la forme $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ est une fonction définie sur un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. (on pourrait plus en général considérer des fonctions définies sur des espaces vectoriels normés).
Définition. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$, converge simplement sur Ω lorsque pour tout $x \in \Omega$ la suite (numérique) de terme général $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
La fonction $g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) : \Omega \to \mathbb{K}$ est dite limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Exemple. $f_n(x) = \frac{x}{n}$.
Parfois il n'y a pas de convergence sur tout Ω.
Définition. On dit domaine de convergence d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$, le sous-ensemble de $A \subset \Omega$ t.q. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi $x \in A$.
On peut considérer aussi des séries de fonctions, c'est à dire les suites des sommes partielles des suites des fonctions. Étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a la série corréspondante $\sum_{n\geq 0} f_n = \sum_{n\geq 0} f_n(x) = \left(\sum_{k=0}^n f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
Définition. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ converge simplement sur Ω lorsque la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge pour tout $x \in \Omega$.
Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur Ω, on peut dénoter $\left(\sum_{k=0}^\infty f_k\right)(x)$ la fonction $x \in \Omega \mapsto \sum_{k=0}^\infty f_k(x)$.
Exemple. $\sum_{n\geq 0} \frac{x}{2^n}$.

Exemple 1. $\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} z^n$ sur $\mathbb{C}$.
Exemple 2. $\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ sur $\mathbb{C}$.
Exemple 3. $\sum_{n\geq 0} f_n(z) = \sum_{n\geq 0} \cos^n(x)$ sur $\mathbb{R}$.
Exemple 4. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n = \cos nx : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Exemple 5. $\sum_{n\geq 0} xe^{-nx}$. On perd la continuité à la limite.
Exemple 6. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On perd la dérivabilité à la limite.
Exemple 7. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n = n^2xe^{-nx} : [0,1] \to \mathbb{R}$. On a que $\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 (\lim_n f_n)(x)dx$.

2.1 Modes de convergence

Définition. On dit que la suite de terme général $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ converge uniformement sur Ω à $g : \Omega \to \mathbb{K}$ si

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N,\ \forall x \in \Omega,\ |f_n(x) - g(x)| \leq \epsilon. \tag{2.1}$$

La condition (2.1) équivaut à

$$\exists N \in \mathbb{N}\ t.q.\ \forall n \geq N,\ \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - g(x)| < \infty\ et\ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - g(x)| = 0. \tag{2.2}$$

Définition. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ converge uniformement si sa suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ converge uniformement sur Ω.

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ converge uniformement ssi

$$\exists N \in \mathbb{N} \ t.q. \ \forall n \geq N, \ \sup_{x\in\Omega} |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| < \infty \ et \ \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\Omega} |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| = 0. \tag{2.3}$$

Définition. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ converge normalement si pour tout n la fonction $f_n(x)$ est bornée et si la série $\sum_{n\geq 0} \sup_\Omega |f_n(x)| = \sum_{n\geq 0} \|f_n(x)\|_{\infty,\Omega}$ est convergente.
Exemple 1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx & si \ x \in [0, \frac{1}{2n}], \\ -2nx + 2 & si \ x \in]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}], \\ 0 & si \ x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

converge simplement mais pas uniformement.
Exemple 2. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ sur $\mathbb{R}$ converge uniformement mais pas normalement.
Exemple 3. $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ est définie par $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \ x \in [n, n+1[, \\ 0 & sinon, \end{cases}$ converge uniformement mais pas normalement.
Exemple 4. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

2.2 Comparaison des modes de convergence

Proposition 2.2.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions qui converge uniformement sur Ω à $g : \Omega \to \mathbb{K}$. Alors $f_n \to g$ simplement lorsque $n \to \infty$.*

Démonstration. Soit $x \in \Omega$ fixé. On a

$$|\lim_n (f_n(x) - g(x))| = \lim_n |(f_n(x) - g(x))| \leq \lim_n \sup_{x\in\Omega} |(f_n(x) - g(x))| = 0.$$

□

Définition. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme lorsque $\forall \epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall m > n \geq N$ on a $\sup_{x\in\Omega} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$.
Définition. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ de terme général $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme si sa suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Proposition 2.2.2. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement sur Ω ssi elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.*

Démonstration. ($\Rightarrow$)
Soit g la fonction limite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur Ω. Alors $\forall \epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ et $\forall x \in \Omega$ on a $|f_m(x) - g(x)| \leq \epsilon/2$. Donc $\forall m > n \geq N$ et $\forall x \in \Omega$ on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_n(x) - g(x)| + |f_m(x) - g(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.
($\Leftarrow$)
$\forall x \in \Omega$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite (numérique) de Cauchy, donc elle admet une limite $g(x)$. C'est à dire, $f_n \to g$ simplement sur Ω lorsque $n \to \infty$. Or $\forall m > n \geq N$ et $\forall x \in \Omega$ on a $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$. En prenant la limite pour $m \to \infty$ on obtient que la convergence de f_n à g est uniforme. □

Théorème 2.2.3. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ une suite de fonctions.*

1. *Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformement sur Ω, alors elle converge simplement.*
2. *Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur Ω, alors elle converge uniformement.*

Démonstration. 1) C'est la Proposition 2.2.1 appliquée aux suites des sommes partielles.
2) $\sum_{n\geq 0}\|f_n\|_{\infty,\Omega}$ converge, donc sa suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n}\|f_k\|_{\infty,\Omega})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e. $\forall\epsilon$ il existe $n\in\mathbb{N}$ t.q. $\forall m>n\geq N$ $\sum_{k=n+1}^{m}\|f_n\|_{\infty,\Omega}\leq\epsilon$. Or, pour tout $x\in\Omega$ $\sum_{k=n+1}^{m}f_n(x)\leq\sum_{k=n+1}^{m}\|f_n\|_{\infty,\Omega}\leq\epsilon$, ce qui montre que $\sum_{n\geq 0}f_n$ satisfait le critère de Cauchy uniforme. La proposition 2.2.2 permet de conclure. □

Proposition 2.2.4. *La série de terme générale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformement convergente ssi elle converge simplement et la suite des restes de Cauchy $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)$ tend uniformement vers 0.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$, donc $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement à 0 ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement à S. □

Corollaire 2.2.5. *S'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Omega$ t.q. $f_n(x_n)\not\to 0$ lorsque $n\to\infty$, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformement à* 0.

Exemple 1. $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$, $x\in[0,1]$, converge simplement, ne converge pas normalement, mais la suite des restes converge uniformement donc elle converge uniformement.
Exemple 2. $f_:[0,2]\to\mathbb{R}$ pour $n\geq 1$ par

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x & si\ x\in[0,1/n],\\ 2n-n^2x & si\ x\in]1/n,2/n],\\ 0 & si\ x\in]2/n,2].\end{cases}$$

On a que $f_n\to 0$ simplement mais $f_n(1/n)=n\not\to 0$ donc la convergence n'est pas uniforme.

2.3 Propriétés éventuelles des limtes

Théorème 2.3.1 (Interversion des limites)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:\Omega\to\mathbb{K}$ une suite de fonctions et soit $x_0\in\Omega\cup\{\pm\infty\}$. Supposons que*

1. *$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement sur Ω à une fonction $g:\Omega\to\mathbb{K}$.*
2. *Pour tout n, $L_n=\lim_{x\to x_0}f_n(x)$ existe finie.*

Alors les quantités suivantes existent et sont égales :

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{n\to\infty}L_n=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x).$$

Démonstration. On donne la démonstration pour $x_0\in\Omega$, les autres cas étant similaires.
On montre que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. On a que $\forall x\in\Omega$ et $\forall m,n\in\mathbb{N}$, $|f_n(x)-f_m(x)|\leq\|f_n-f_m\|_{\infty,\Omega}$, donc en passant à la limite pour $x\to x_0$ on en déduit que $|L_n-L_m|\leq\|f_n-f_m\|_{\infty,\Omega}$. Puisque $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme, alors $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy et donc elle converge á $\lim_{n\to\infty}L_n=\mu$.
On va maintenant montrer que $\lim_{x\to x_0}g(x)$ existe et elle est égale à μ.
Soit $\epsilon>0$ fixé.

- $f_n\to g$ uniformement donc $\exists N_1\in\mathbb{N}$ t.q. pour tout $n\geq N_1$ $|f_n(x)-g(x)|\leq\epsilon/3$ pour tout $x\in\Omega$.
- $L_n\to\mu$ donc $\exists N_2\in\mathbb{N}$ t.q. pour tout $n\geq N_2$ $|L_n-\mu|\leq\epsilon/3$.
- Soit $\bar{n}\geq\max\{N_1,N_2\}$ fixé. $f_{\bar{n}}(x)\to L_{\bar{n}}$ lorsque $x\to x_0$ donc $\exists\delta>0$ t.q. si $|x-x_0|<\delta$ alors $|f_{\bar{n}}(x)-L_{\bar{n}}|\leq\epsilon/3$ pour tout $x\in\Omega$.

Par conséquant, si $|x-x_0|<\delta$, alors $|g(x)-\mu|\leq|g(x)-f_{\bar{n}}(x)|+|f_{\bar{n}}(x)-L_{\bar{n}}|+|L_{\bar{n}}-\mu|\leq\epsilon$. □

Or, supposons que $\forall n$ les fonctions f_n soient continues en x_0. Alors $f_n(x)\to f_n(x_0)$ lorsque $x\to x_0$. On a donc le résultat suivant

Corollaire 2.3.2 (Continuité des limites uniformes I)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:\Omega\to\mathbb{K}$ une suite de fonctions continues en x_0 qui converge uniformement sur Ω à $g:\Omega\to\mathbb{K}$. Alors g est continue en x_0.*

Corollaire 2.3.3 (Continuité des limites uniformes II)**.** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n:\Omega\to\mathbb{K}$ une suite de fonctions continues sur Ω qui converge uniformement sur Ω à $g:\Omega\to\mathbb{K}$. Alors g est continue sur Ω.*

Théorème 2.3.4 (Limite diagonale.). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{K}$ *une suite de fonctions continues sur* Ω *qui converge uniformément sur* Ω *à* $g : \Omega \to \mathbb{K}$. *Soit* $x_0 \in \Omega$ *et soit* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ *une suite convergente de points* $t_n \to x_0$, $n \to \infty$. *Alors* $f_n(t_n) \to g(x_0)$ *lorsque* $n \to \infty$.

Démonstration. g est continue par le théorème de continuité. Comme $t_n \to x_0$, $\forall \epsilon > 0$ il existe N_1 t.q. $\forall n \geq N_1$ on a $|g(t_n) - g(x_0)| \leq \epsilon/2$. De plus, par convergence uniforme, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N_2$ et $\forall x \in \Omega$ on a $|f_n(x) - g(x)| \leq \epsilon/2$. Donc $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$ on a

$$|f_n(t_n) - g(x_0)| \leq |f_n(t_n) - g(t_n)| + |g(t_n) - g(x_0)| \leq \epsilon.$$

□

Exemple 1. $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ converge normalement et elle est donc continue sur $\overline{\mathbb{D}} = |z| \leq 1 \subset \mathbb{C}$.
Exemple 2. $\sum_{n\geq 0} f_n$ où $f_n(x) = xe^{-nx} : [O,1] \to \mathbb{R}$. La limite n'est pas continue, donc la convergence n'est pas uniforme.
Remarque. On a vu que la limite uniforme de fonctions continues est forcement continue. La réciproque n'est pas vrai. Par exemple on a considéré la suite de fonctions réelles définies sur $[0,2]$ pour $n \geq 1$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & si\ x \in [0, 1/n], \\ 2n - n^2 x & si\ x \in]1/n, 2/n], \\ 0 & si\ x \in]2/n, 2]. \end{cases}$$

On a vu que pour tout $n \geq 1$, f_n est continue et la limite simple est la fonction nulle, donc continue. Pourtant la convergence n'est pas uniforme.
Par contre on pourrait montrer que si une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement à une fonction continue g, et que de plus la convergence est monotone (au sens $\forall x,\ |f_n(x) - g(x)| \searrow 0$ lorsque $n \to \infty$), alors la convergence est uniforme. Ce résultat est connu sous le nom de *Lemme de Dini*.

Théorème 2.3.5 (Interversion limite intégrale). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *continues sur* $[a,b]$ *qui converge uniformément sur* $[a,b]$ *à* $g : [a,b] \to \mathbb{K}$. *Alors (g est continue et)* $\int_a^b g(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

Démonstration. g est continue par le théorème de continuité des limites uniformes, donc $\int_a^b g(t)dt$ est bien définie et

$$\left|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b g(t)dt\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - g(t))dt\right| \leq \int_a^b |f_n(t) - g(t)|dt \leq (b-a)\|f_n - g\|_{\infty,[a,b]} \to 0,\ n \to \infty.$$

□

En appliquant ce théorème aux suites des sommes partielles, on obtient

Corollaire 2.3.6. *Soit* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *une série de fonctions* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *continues sur* $[a,b]$ *qui converge uniformément sur* $[a,b]$ *à* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$. *Alors (S est continue et)* $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

Théorème 2.3.7 (Dérivabilité de la limite). *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions* $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. *ON suppose*

1. *Dérivabilité des fonctions :* $f_n \in C^1([a,b])$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Convergence uniforme des dérivées :* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* $h : [a,b] \to \mathbb{K}$.
3. *Convergence simple en un point :* $\exists x_0 \in [a,b]$ *t.q.* $f_n(x_0) \to L \in \mathbb{K}$ *lorsque* $n \to \infty$.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ *définie par* $g(x) = L + \int_{x_0}^x h(t)dt$.

Démonstration. Soit $x \in [a,b]$. On a

$$\begin{aligned}
|g(x) - f_n(x)| &= \left| L + \int_{x_0}^{x} h(t)dt - f_n(x) \right| \\
&= \left| L + \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - h(t))dt + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)h(t)dt - f_n(x) \right| \\
&\leq |L - f_n(x_0)| + \left| \left[f_n(x_0) - f_n(x) + \int_{x_0}^{x} (f_n'(t) - h(t))dt \right] + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)h(t)dt \right| \\
&\leq |L - f_n(x_0)| + |x_0 - x| \|h - f_n'\|_{\infty,[a,b]}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in[a,b]} |g(x) - f_n(x)| &\leq |L - f_n(x_0)| + \sup_{x\in[a,b]} |x_0 - x| \|h - f_n'\|_{\infty,[a,b]} \\
&= |L - f_n(x_0)| + |b - a| \|h - f_n'\|_{\infty,[a,b]} \to 0
\end{aligned}$$

lorsque $n \to \infty$. □

Remarque. Si $f_n \in C^1$ pour tout n et $f_n \to g$ uniformement lorsque $n \to \infty$, la limite g n'est pas forcément C^1. Par exemple on peux considérer $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.
Par récurrence sur le nombre de dérivation on a

Théorème 2.3.8. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $f_n : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Supposons que pour quelque $k \in \mathbb{N}$*

1. *$f_n \in C^k([a,b])$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *$\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement sur $[a,b]$ vers $h : [a,b] \to \mathbb{K}$.*
3. *pour tout $j < k$ $\exists x_j \in [a,b]$ t.q. $f_n(x_j) \to L_j \in \mathbb{K}$ lorsque $n \to \infty$.*

Alors pour tout $j \leq k$, $\left(f_n^{(j)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement sur $[a,b]$ vers $g^{(j)}$, où la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{K}$ est t.q. $g^{(k)} = h$.