Institut Galilée *CP2I2*
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Suites et séries de fonctions

Exercice 1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles qui converge simplement vers une fonction f sur I. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :*

(a) Si les f_n sont croissantes, alors f aussi.

(b) Si les f_n sont strictement croissantes, alors f aussi.

(c) Si les f_n sont bornées, alors f aussi.

(d) Si les f_n sont périodiques de période $T > 0$, alors f aussi.

(e) Si les f_n sont continues en a, alors f aussi.

Reprendre l'exercice en remplaçant la convergence simple par la convergence uniforme.

Exercice 2. *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :*

(a) $f_n(x) = nx^n \ln(x)$, $f_n(0) = 0$, sur $[0, 1]$.

(b) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $[0, \infty[$, puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

(c) $f_n(x) = n^b x^n (1 - x)$ sur $[0, 1]$, pour $b \geq 0$

Exercice 3. *On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.*

Exercice 4. *Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.*

(a) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.

(c) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.

(d) En déduire que la série $\sum_{n\geq1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(e) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(f) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.

(g) Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne convergence pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{n\geq1} \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} \frac{e^{-nx^4}}{x^2}.$$

(a) Déterminer le domaine de convergence simple.

(b) Calculer la somme.

(c) Déterminer au moins un ensemble où la convergence est uniforme.

Exercice 6. *On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la dérivée est uniformement continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ pour quelque $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite de terme général*

$$g_n(x) = e^n \left[f\left(x + e^{-n}\right) - f(x)\right]$$

converge uniformement vers f' sur le même intervalle.

Exercice 7. *Etudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions* (f_n) *suivantes*

$$a)\ \min\{n, x^{-1/2}\} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \qquad b)\ \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}} \text{ sur } \mathbb{R}_+, \qquad c)\ \sin^n x\ \cos x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 8. *Étudier la convergence sur* $[0,1]$ *de la série de terme général* $f_n(x) = x^a(1-x)^n$, $a > 1$.

Exercice 9. *Discuter la convergence (simple, uniforme, normale) des séries de fonctions complexes*

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) z^n \quad c)\ \sum_{n\geqslant 3} \frac{(z-(3+\pi i))^n}{2^n - n^2}$$

Exercice 10. *Soit* $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ *défini pour* $x \geq 0$ *et* $n \geq 1$.

(a) *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$.

(b) *Montrer que la série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}_+$.

(c) *La convergence est-elle normale sur* $\mathbb{R}_+$ *?*

Exercice 11. *Soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par* $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+2^n n x^2}$.

(a) *Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.*

(b) *Calculer* $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ *et* $\lim_{n\to+\infty} I_n$. *En déduire que la suite* (f_n) *n'est pas uniformément convergente sur* $[0,1]$.

(c) *Donner une démonstration directe du fait que la suite* (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $[0,1]$.

Exercice 12. *On considère la série de fonctions* $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$.

(a) *Prouver que* S *est définie sur* $I =]-1,+\infty[$.

(b) *Prouver que* S *est continue sur* I.

(c) *Prouver que* S *est dérivable sur* I, *calculer sa dérivée et en déduire que* S *est croissante sur* I.

(d) *Quelle est la limite de* S *en* -1 *? en* $+\infty$ *?*

Exercice 13. *On considère la série de fonctions*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(2x)^n}{2n+x^2}.$$

(a) *Déterminer le domaine de convergence simple.*

(b) *Montrer que cette série converge uniformement sur tout intervalle* $[0,b]$ *avec* $0 < b < 1/2$.

(c) *Montrer que la somme de la série est une fonction ontinue sur l'intervalle* $[0,1/2[$.

Exercice 14. *Soit la série de fonctions* $S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x}{n^2+x^2}$.

(a) *Démontrer que* S *définit une fonction continue sur* $\mathbb{R}$.

(b) *Soit* $x > 0$ *et* $n \geq 1$. *Justifier que*

$$\int_n^{n+1} \frac{x}{x^2+t^2} dt \leq \frac{x}{x^2+n^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{x}{x^2+t^2} dt.$$

(c) *En déduire que* S *admet une limite en* $+\infty$ *et la déterminer.*

Exercice 15. *Soit* (P_n) *une suite de polynômes qui converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction* f. *Montrer que* f *est un polynôme.*