## Séries numériques

**Exercice 1-** Donner la nature et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec $u_0 = 3$ et $2u_{n+1} = u_n$.

**Exercice 2-** Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme quand elles sont convergentes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}, \qquad e)\ \sum_{n\geq 1} \frac{2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2^{n+1}}, \qquad c)\ \sum_{n\geq 1} \ln(1+\tfrac{1}{n}),$$

**Exercice 3-** Donner la nature des séries suivantes :

$$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad b)\ \sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}, \qquad d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{5^n}{n!},$$

$$e)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2+\cos(n)}{n^2+n+2}, \qquad f)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2} \qquad g)\ \sum_{n\geq 1} \frac{2^n-1}{3^n+4}, \qquad h)\ \sum_{n\geq 1} \frac{3+(-1)^n}{n}$$

$$i)\ \sum_{n\geq 1} \frac{n+\ln(n)}{\sqrt{n}+n^3}, \quad j)\ \sum_{n\geq 1} [\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-1}], \quad k)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

**Exercice 4-** Donner la nature des séries de terme général

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{n^3} & n \text{ impair.} \end{cases}$$

**Exercice 5-** On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{3^n}{1+4^{2n}}, \quad n \geq 0.$$

a) Montrer que cette série converge.

b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 5^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

c) Montrer que $0 \leq R_p \leq 4^{-1}5^{-p}$ pour tout $p \geq 0$.

d) En déduire une valeur approchée de la somme $S$ de cette série avec une erreur absolue inférieure à $10^{-2}$.

**Exercice 6-** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif. Dire si les assertions suivantes sont correctes ou non :

i) si une des séries est divergente alors la série de terme général $u_n + v_n$ est divergente.

ii) si les deux séries sont divergentes alors la série de terme général $u_n v_n$ est divergente.

**Exercice 7-** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes

$$a)\ \sum_{n\geq 0} u_n^2, \qquad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{u_n}{u_n+1}, \qquad c)\ \sum_{n\geq 0} \ln(1+u_n) \qquad d)\ \sum_{n\geq 0} \sqrt{u_n v_n}.$$

**Exercice 8-** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses :

1- Si les deux séries sont divergentes, alors la série de terme général $(u_n + v_n)$ est divergente.

2- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors $\sum_{n\geq 0} u_n = +\infty$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n = -\infty$.

**Exercice 9-**

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \alpha > 0, \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}, \qquad c) \sum_{n\geqslant 2} \sin\left(\frac{n+1}{n-1}\right), \qquad d) \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right),$$

$$e) \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \alpha > 0, \qquad f) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\pi}}, \qquad g) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad h) \sum_{n\geqslant 1} \frac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n},$$

$$i) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}, \qquad j) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n+1}{n}, \qquad k) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1+(-1)^n n}{n^2}. \qquad l) \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R},$$

$$m) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}, \qquad n) \sum_{n\geqslant 1} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right), \qquad o) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)},$$

$$p) \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right). \qquad q) \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n \cos\left((-n)^n\pi\right)}{n^{2/3}},$$

**Exercice 10-** On considère les séries $\sum u_n$ and $\sum v_n$ définies par :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1- Quelle est la nature de la série $\sum u_n$ ?

2- Montrer que $u_n \sim v_n$

3- Quelle est la nature de la série $\sum v_n$ ?

**Exercice 11-**

1- Déterminer la nature de la la série de terme général $(u_n)_{n>0}$ défini par

$$u_n = \begin{cases} \frac{4}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

*Indication : on pourrait regrouper les termes deux à deux.*

2- Cela vous paraît-il en contradiction avec le critère de convergence des séries alternées ?

**Exercice 12-** Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ lorsque son terme général $u_n$ est défini par :

$$a)\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}} \qquad b)\ \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \qquad c)\ \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} \qquad d)\ \frac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$$

$$e)\ \left(\frac{n-1}{2n^3+1}\right)^{n(-1)^n} \qquad f)\ \arctan(n+a\sqrt{n})-\arctan(n),\ \textit{avec } a>0.$$

$$g)\ \sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[4]{n^4+3an},\ a\in\mathbb{R} \qquad h)\ \frac{1}{n^\alpha}\left((n+2)^{1+2/n}-(n-2)^{1-2/n}\right),\ \alpha\in\mathbb{R},$$

$$i)\ \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln(n!)} \qquad l)\ \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right).$$

**Exercice 13-** Étudier la convergence de la série définie par $u_1 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = e^{-u_n}/n^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Exercice 14-** Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad et \quad v_n = \ln\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)$$

(pour $n \geq 2$) sont convergentes, et calculer leur limites.

**Exercice 15-** Étudier la convergence des séries de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^a \ln^b(n)}$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.

**Exercice 16-** Sachant que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente et de somme $\ln 2$.

**Exercice 17-** Soit, pour $n \geq 1$ et $a > 0$, la suite $u_n = \frac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. Lorsque $a = e$, prouver que, pour $n$ assez grand, $u_{n+1}/u_n \geq 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$ ?

**Exercice 18-** Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $w_n = 3^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{k!}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$

**Exercice 19-** Par comparaison à une intégrale, donner un équivalent de $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k)$. La série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?

**Exercice 20 (Formule de Stirling)-**

1. Soit $(x_n)$ une suite de réels et soit $(y_n)$ définie par $y_n = x_{n+1} - x_n$. Démontrer que la série $\sum_n y_n$ et la suite $(x_n)$ sont de même nature.
2. On pose $(u_n)$ la suite définie par $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$. Donner la nature de la série de terme général $v_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.
3. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $n! \sim_{+\infty} C\sqrt{n} n^n e^{-n}$.
4. On pose $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$. Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
5. Déterminer une formule explicite pour $I_{2n}$ et $I_{2n+1}$ en fonction de $C$.
6. Montrer que $I_{2n} \sim_{n\to\infty} I_{2n+1}$. En déduire la valeur de $C$.