Institut Galilée
Département de Mathématiques

Licence 2
novembre 2014

Feuille 5 : **Séries de Fourier**

Exercice 1-
Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(t) \sin^m(t) dt,$$

où $m > 0$ est un entier impair et $n > 0$ est un entier quelconque.

Exercice 2- Soit f une fonction réelle T-périodique et continue par morceaux. Étant donné $\lambda > 0$ un nombre réel, on définit $g(t) = f(\lambda t)$.

1- Est-ce que la fonction g est périodique ? Si oui, quelle est sa période ?

2- Calculer les coefficients de Fourier de g en fonction de ceux de f.

Exercice 4- Soit f une fonction $2\pi-$périodique, continue par morceaux.

1- Montrer que si $f(x + \pi) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les coefficients de Fourier d'indice pair sont nuls.

2- Montrer que si $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, les coefficients $a_{2n-1}(f)$ et $b_{2n}(f)$ sont nuls pour tout $n \geq 1$.

Exercice 5- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi-$périodique définie par $f(x) = x^2$ en tout point $x \in]-\pi, \pi]$.

1-Développer f en série de Fourier.

2-En déduire la série de Fourier de la fonction $g(x) = 2x$ sur $]-\pi, \pi]$.

3-Utiliser la formule de Parseval pour sommer les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

et en déduire les identités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4-Appliquer le théorème de Dirichlet pour montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 6- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2-$périodique définie par $f(x) = x - x^3$ en tout point $x \in]-1, 1]$.

1-Développer f en série de Fourier.

2-En déduire la série de Fourier des fonctions $g(x) = 1 - 2x^2$ et $h(x) = x^2$ sur $]-\pi, \pi]$.

3-Utiliser la formule de Parseval pour sommer les séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

et en déduire les identités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4-Appliquer le théorème de Dirichlet pour montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \qquad \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 7- Soit $f(x) = \sin^2(x)$.

1-Calculer la série de Fourier de f

2-En déduire les valeurs des intégrales suivantes pour $n \geq 3$:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(nx)dx.$$

Exercice 8- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $2\pi-$périodique définie en tout $x \in [-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.

1-Déterminer la série de Fourier de f.

2-Étant donné x un nombre réel, calculer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$

Exercice 9- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et impaire définie par $f(x) = x(\pi - x)$ sur $[0, \pi]$.

1- Dessiner le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

2. Est-ce que la fonction f est continue par morceaux ? C^1 par morceaux ? Justifier votre réponse.

3. Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n de f pour $n \geq 0$.

4. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Exercice 10- Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Considérons la fonction $2\pi-$périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vaut $f(x) = \cos(\alpha x)$ sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

1-Développer f en série de Fourier.

2-Montrer à l'aide du théorème de Dirichlet que la formule suivante est vraie :

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

3-Montrer par intégration par parties que la fonction

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2\alpha} \sin(\alpha x) \cos(\alpha x)$$

est une primitive de $\cos^2(\alpha x)$ et déduire de la formule de Parseval l'identité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

4-Trouver un changement de variable qui permette de réécrire l'identité ci-dessus sous la forme

$$\text{cotan}(u) = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2},$$

où $u \in \mathbb{R}$ n'est pas un multiple entier de π. Ceci est appelé parfois le développement eulérien de la fonction $\text{cotan}(x)$.

5-Le but de cette dernière question est de montrer que si $0 < \alpha < 1$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

a. Montrer que l'on peut écrire l'intégrale ci-dessus comme la somme de deux intégrales de la forme

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

b. Utiliser le développement en série de puissances de la fonction $\frac{1}{1+t}$ pour montrer que l'on a

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\gamma}.$$

c. Déduire le résultat de la question 2.