Institut Galilée *Licence 2 SPI-ATS*
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Feuille 4: **Séries Entières**

Exercice 1-
Donner le rayon de convergence des séries entières suivantes:

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n, \qquad b) \sum_{n=0}^{+\infty} n z^n, \qquad c) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^n, \qquad d) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n,$$

$$e) \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) z^n, \qquad f) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) z^n, \qquad g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)} z^n.$$

Exercice 2- Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} z^{2n}$ est $\sqrt{2}$.

Exercice 3-
Soit (a_n) une suite de termes strictement positifs, convergente, de limite $\ell \neq 0$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$?

Exercice 4-
Soit (a_n) une suite de termes strictement positifs. On suppose que la suite $(\frac{a_n}{a_{n+1}})$ admet une limite R. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 z^n$?

Exercice 5- Développer en série entière la fonction $z \mapsto \frac{z^2}{1-z}$.

Exercice 6-
1- Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$.
2- Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$

sur le disque de convergence (dont on précisera le rayon) de cette série.
3- Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$$

sur le disque de convergence (dont on précisera le rayon) de cette série.
4- En déduire une expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 z^n$.

Exercice 7- Développer en série entière les fonctions suivantes:

$$a)f(x) = \ln(1-x^2), \qquad b)f(x) = \ln(1+x^2), \qquad c)f(x) = (1+x)\ln(1+x).$$

Exercice 8-

On considère l'équation différentielle:

$$(1+x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0, \tag{1}$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. On va chercher une solution de cette équation sous la forme d'une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1- Montrer que $a_2 = a_0$, $a_3 = 0$ et

$$\forall n \geqslant 2, \ \ (n+1)a_{n+2} + (n-1)a_n = 0.$$

2- En déduire que $a_n = 0$ pour n impair.

3- Montrer que $a_{2p} = \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}$, pour tout $p \geqslant 1$.

4- Donner le rayon de convergence de la série et conclure sur la validité de cette solution.

5- Exprimer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ à l'aide de fonctions usuelles. En déduire une solution de l'équation différentielle (1). Quel est le domaine de validité de cette solution?

Rappel:

$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots$$

Exercice 9- Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série convergente de rayon $0 < R < +\infty$.

1- Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que la somme $\sum_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ est convergente si $|z-z_0| < R$ et divergente si $|z-z_0| > R$.

2- Montrer que la somme $\sum_{n\geqslant 0} a_n \frac{1}{z^n}$ est convergente si $|z| > \frac{1}{R}$ et divergente si $|z| < \frac{1}{R}$.

3- Montrer que lorsque $|z| > 1$ on a

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1}.$$

Exercice 10- Soit l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1- Montrer que f est de classe C^∞.

2- Montrer que f n'est pas développable en série entière.