Institut Galilée *Licence2 SPI-ATS*
Département de Mathématiques Année 2014-2015

Feuille 3: **Séries à termes quelconques**

Exercice 1 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses:

1- Si les deux séries sont divergentes, alors la série de terme général $(u_n + v_n)$ est divergente.

2- Si la série $\sum u_n$ est divergente, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -\infty.$$

Exercice 2
Déterminer la nature des séries suivantes:

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha},\ \alpha > 0, \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n+\cos(n)}, \qquad c) \sum_{n\geqslant 2} \sin\left(\frac{n+1}{n-1}\right),$$

$$d) \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right), \qquad e) \sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \alpha > 0.$$

Exercice 3
Déterminer la nature des séries suivantes:

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\pi}}, \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad c) \sum_{n\geqslant 1} \frac{n+3}{(-1)^n\sqrt{n}-3n},$$

$$d) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n-\ln(n)}, \qquad e) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{n+1}{n}, \qquad f) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1+(-1)^n n}{n^2}.$$

Exercice 4
Déterminer la nature des séries suivantes:

$$a) \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad b) \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+3}, \qquad c) \sum_{n\geqslant 1} n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right),$$

$$d) \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}, \qquad e) \sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 5

On considère les séries $\sum u_n$ and $\sum v_n$ définies par:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

1- Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

2- Montrer que $u_n \sim v_n$? Peut-on en déduire la nature de la série $\sum v_n$?

3- Quelle est la nature de la série $\sum v_n$?

4- Que constatez-vous?

Exercice 6

Soit la série de terme général $(u_n)_{n>0}$ défini par

$$u_n = \begin{cases} \frac{4}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

1- Que pouvez-vous dire sur le signe du terme général? De sa limite?

2- Pouvez-vous en déduire la nature de la série?

Écrire les premiers termes du terme général.

3- En regroupant les termes deux à deux, que constatez-vous? (on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$)

4- En déduire la nature de la série de terme général (u_n).

5- Cela vous paraît-il en contradiction avec le critère de convergence des séries alternées?