Institut Galilée *Licence 2 SPI-ATS*

Département de Mathématiques Année 2014-2015

Feuille 2 : **Séries à termes positifs**

Exercice 1- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à terme général positif. Dire si les assertions suivantes sont correctes ou non :

i) si une des séries est divergente alors la série de terme général $u_n + v_n$ est divergente.

ii) si les deux séries sont divergentes alors la série de terme général $u_n v_n$ est divergente.

Exercice 2- Donner la nature des séries suivantes et calculer leur somme quand elles sont convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\tfrac{1}{n}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\sqrt{n+1} - \sqrt{n}], \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Exercice 3- Donner la nature et calculer la somme de la série $\sum u_n$ avec

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2}.$$

Exercice 4- Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 5- Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2+\cos(n)}{n^2+n+2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Exercice 6- Donner la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n-1}{3^n+4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3+(-1)^n}{n}.$$

Exercice 7- Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Exercice 8- Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & n \text{ pair} \\ \frac{n+1}{n^3} & n \text{ impair}. \end{cases}$$

Exercice 9- Quelle est la nature des séries suivantes ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\ln(n)}{\sqrt{n}+n^3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} [\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}], \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Exercice 10- Soit $\alpha > 1$ un réel. On considère la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$\frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}\right] > \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

En déduire que la série converge et donner un équivalent du reste R_p.

Exercice 11- On considère la série de terme général

$$u_n = \frac{3^n}{1+4^{2n}}, \quad n \geq 0.$$

a) Montrer que cette série converge.

b) Montrer que $0 \leq u_n \leq 5^{-n}$ pour tout $n \geq 0$.

c) Montrer que $0 \leq R_p \leq 4^{-1}5^{-p}$ pour tout $p \geq 0$.

d) En déduire une valeur approchée de la somme S de cette série avec une erreur absolue inférieure à 10^{-2}.

Exercice 12- Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{u_n+1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+u_n).$$

Exercice 13- Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes à termes positifs. Déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt{u_n v_n}$.