Institut Galilée- Université Paris 13 Année 2014/2015
L2 Mentions SPI et ATS- feuille n°1

Exercice 1 Vrai ou faux. Dire pour chacune des propriétés suivantes si elle est vraie ou fausse. La prouver dans le premier cas, donner un contre-exemple dans le second.

1. Une suite de réels positifs qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
2. Toute suite croissante et majorée est bornée.
3. Si la suite (u_n) converge alors $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.
4. Si $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$ alors (u_n) converge (indication : regarder $u_n = \ln(n)$).

Exercice 2 Donner la nature (convergente ou divergente) des suites suivantes. Calculer leur limite si elle existe.

$$n; \quad (n+3)^2; \quad (-1)^n; \quad \frac{1}{n+1}; \quad \ln(\frac{1}{n});$$

$$\exp(\frac{1}{1+n^2}); \quad \sin(\frac{1}{n^2}); \quad \cos(\frac{n\pi}{2}).$$

Exercice 3 Donner la nature (convergente ou divergente) des suites suivantes. Calculer leur limite si elle existe.

$$(-1)^n + \frac{1}{n}; \quad \cos(\frac{1}{n}) + \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \frac{3i+4}{n} + 2; \quad \cos(\frac{1}{n^2})(1 + \frac{1}{n^3}).$$

Exercice 4 Donner la nature (convergente ou divergente) des suites suivantes. Calculer leur limite si elle existe.

$$\frac{(-1)^n}{n}; \quad \frac{\sin(n)}{n}; \quad \frac{\cos(n)+3}{n^2}; \quad \frac{e^{in}}{n}.$$

Exercice 5 Donner la nature (convergente ou divergente) des suites suivantes. Calculer leur limite si elle existe.

$$\frac{n^2+1}{2n^2-3}; \quad \frac{3n+1}{n^3+1}; \quad \frac{n^5+7}{n^4-1}; \quad \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}.$$

Exercice 6 Donner la nature (convergente ou divergente) des suites suivantes. Calculer leur limite si elle existe.

$$\sqrt{n} - n; \quad \frac{n!}{n^n}; \quad \frac{n\sin(n!) - 2n}{n^2+1}.$$

Exercice 7 Soit (u_n) une suite de nombre réels strictement positifs telle que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})$ converge vers un réel a.

1. Donner un exemple d'une telle suite pour laquelle on a $a = 0$. Même question avec $a = 1$ et $a = 2$.
2. On suppose que $a < 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
3. On suppose que $a > 1$. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
4. Supposons que $a = 1$, que peut-on dire sur la convergence de (u_n) ?

Exercice 8 Soient $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites données par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En déduire qu'elles ont même limite.

Exercice 9 Soit $a > 0$. On définit la suite (u_n) par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}).$$

On se propose de montrer que (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que si $n \geqslant 1$ alors $u_n \geqslant \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge et que la limite est $\sqrt{a}$.

Exercice 10 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite (x_n) en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une unique solution $\alpha \in [0, 1/2]$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leqslant x_n < 1/2$ pour tout $n \geqslant 0$.
5. Montrer que la suite (x_n) converge vers α.