Mathématiques CP2I2 S3

DST1 - 22/09/2014 - Corrigé

Exercice 1 Déterminer la nature des séries numériques suivantes

$$a) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n-1}{n^3+1}, \qquad b) \sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{(2n)!}$$

Déterminer la nature des séries numériques suivantes. Lorsque une série converge, en calculer sa somme.

$$c) \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}, \qquad d) \sum_{n\geqslant 0} 3\left(\frac{8\pi}{25}\right)^n.$$

a) On observe que $\frac{n-1}{n^3+1} \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}$ *et que* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *est une série convergente, car série de Riemann de la forme* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^a}$ *avec* $a>1$. *Donc par le critère d'équivalence,* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n-1}{n^3+1}$ *converge.*

b) On étudie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{(2n+1)(2n+2)} \sim_{n\to\infty} \frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Puisque $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0$ *existe plus petite que* 1, *alors par le critère de D'Alambert* $\sum_{n\geqslant 0}\frac{n!}{(2n)!}$ *converge.*

c) On décompose $\frac{1}{4n^2-1}$ *en éléments simples. On a*

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{A}{2n-1}+\frac{B}{2n+1} = \frac{(2A+2B)n+(A-B)}{4n^2-1}.$$

Donc

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Then $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2-1} = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} = \sum_{n\geqslant 1}(v_n - v_{n+1})$ *a la forme d'une série téléscopique lorsqu'on pose* $v_n = \frac{1}{2(2n-1)}$.
En particulier, comme $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(2n-1)} = 0$, *alors* $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{4n^2-1}$ *converge et*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = v_1 - \lim_{n\to\infty} v_n = \frac{1}{2(2-1)} = \frac{1}{2}.$$

d) On observe que $\pi > 3,14$ *implique* $8\pi > 25,12 > 25$. *Alors* $\sum_{n\geqslant 0} 3\left(\frac{8\pi}{25}\right)^n$ *est une série géométrique de raison* $\frac{8\pi}{25} > 1$, *donc elle diverge.*

Exercice 2 1. Énoncer la règle de d'Alambert pour la convergence des séries à termes réels.

2. Donner un exemple de série à termes réels strictement positifs dont la nature ne peut pas être déduite en utilisant la règle de D'Alambert.

1) Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *une série à termes réels strictement positifs. Supposons qu'il existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in [0, +\infty]$.

1. *Si* $l < 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$, *alors* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *diverge.*

2) On considére pour cela les séries de Riemann de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$. *On sait que elles convergent lorsque* $a > 1$ *et divergent lorsque* $a \leqslant 1$. *Pourtant*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^a}{n^a} = 1, \ \forall a.$$

Exercice 3 Déterminer la nature de la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ dans les cas suivants.

$$a)\ u_n = \sqrt{n}\log(1+n^{-2}), \qquad b)\ u_n = \frac{\log(n)}{n^2},$$

$$c)\ u_n = \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right), \qquad d)\ u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$

a) On sait que $\ln(1+\varepsilon_n) \sim_{n\to\infty} \varepsilon_n$ *lorsque* $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. *Donc* $u_n = \sqrt{n}\log(1+n^{-2}) = (\ln 10)^{-1}\sqrt{n}\ln(1+n^{-2}) \sim_{n\to\infty} (\ln 10)^{-1}\sqrt{n}n^{-2} = (\ln 10)^{-1}n^{-3/2}$. *Or,* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série convergente, car série de Riemann de la forme* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ *avec* $a > 1$. *Donc par le critère d'équivalence,* $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{n}\log(1+n^{-2})$ *converge.*

b) On observe que la série est à termes réels positifs. De plus $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n^{1/2}} = 0$. *En particulier il existe* $N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\frac{\log(n)}{n^{1/2}} \leqslant 1$ *pour tout* $n \geqslant N$. *Par conséquent,*

$$\frac{\log(n)}{n^2} = \frac{\log(n)}{n^{1/2}}\frac{1}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$$

pour tout $n \geqslant N$. *Or,* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ *est une série convergente, car série de Riemann de la forme* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^a}$ *avec* $a > 1$. *Donc par le critère de comparaison,* $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\log(n)}{n^2}$ *converge.*

c) On observe que la suite extraite $u_{2n} = \cos\left(2n\pi + \frac{1}{2n}\right) = \cos\left(\frac{1}{2n}\right) \to 1$ *lorsque* $n \to \infty$. *En particulier le terme générale de la série* $u_n \not\to 0$ *lorsque* $n \to \infty$. *Du coup* $\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ *forcément diverge.*

d) On observe que, lorsque n *est pair,*

$$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

tandis que, lorsque n *est pair,*

$$u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\pi + \frac{1}{n}\right) = -\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Pour tout $n \geqslant 1$, on $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1 < \frac{\pi}{2}$. En particulier $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ et $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est une série alternée. De plus

$$|u_n| = \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0$$

et $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante, car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est déscroissante et $\sin(x)$ est une fonction croissante sur $[0,1]$.
On peut alors appliquer le critère de Leibniz pour les séries alternées et en déduire que $\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$ converge.

Exercice 4 1. Déterminer la nature de la la série de terme général $(u_n)_{n>0}$ défini par

$$u_n = \begin{cases} \frac{4}{n+1} & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \\ -\frac{2}{n} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Indication : on pourrait regrouper les termes deux à deux.

2. Cela vous paraît-il en contradiction avec le critère de convergence des séries alternées ?

1) On rappelle que l'étude de la convergence de la série revient à étudier la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geqslant 1}$. En particulier la série converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geqslant 1} = (\sum_{k=1}^n u_k)_{n\geqslant 1}$ admet une limite finie.
On considère

$$v_n = u_{2n-1} + u_{2n} = \frac{4}{(2n-1)+1} + \left(-\frac{2}{2n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Or, la suite extraite $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ satisfait $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{n} v_k$, donc elle diverge car on sait que la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge. Alors forcément $(S_n)_{n\geqslant 1} u_n$ diverge, c'est à dire, $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est une série divergente.

2) Non, il n'y a pas de contradiction. En fait pour tout n pair,

$$|u_{n+1}| - |u_n| = \frac{4}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2n-2}{n(n+1)} > 0,$$

donc la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante.

Exercice 5 Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de nombres réels, $a_n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tels que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 2.$$

Déterminer la nature des séries suivantes.

$$a) \sum_{n\geqslant 0} \sqrt{a_n}, \; b) \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{a_n}\right)^n, \; c) \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n (2 - a_n).$$

a) $\sqrt{a_n} \to \sqrt{2} \neq 0$ lorsque $n \to \infty$, donc $\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{a_n}$ diverge.

b) $a_n \to 2$ lorsque $n \to \infty$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $a_n \geqslant 3/2$ pour tout $n \geqslant N$. En particulier, $\left(\frac{1}{a_n}\right)^n \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \geqslant N$. Or $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge, car série géométrique de raison $3/2 > 1$, donc $\sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{1}{a_n}\right)^n$ converge par comparaison.

c) $0 \leqslant 2 - a_n < 1$, *donc* $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2-a_n)$ *est une série alternée. De plus*

$$\lim_{n\to\infty}(2-a_n) = 2 - \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

et $(|(-1)^n(2-a_n)|)_{n\geqslant 0} = (2-a_n)_{n\geqslant 0}$ *est une suite décroissante, car* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *est une suite croissante. Alors les hypothèses du critére de Leibniz pour les séries alternées sont satisfaites, et* $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n(2-a_n)$ *converge.*

Exercice 6 Pour tout $b \geqslant 0$, soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = n^b x^n (1-x)$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $[0,1]$.

On étudie la convergence simple. Si $x \in [0,1[$, *alors pour tout* $b \geqslant 0$ $n^b x^n \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$, *donc* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. *De plus,* $f_n(1) = 0$ *pour tout* n. *On en déduit que la suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge simplement sur* $[0,1]$ *et sa limite simple est la fonction* $g(x) = 0$.

On étudie la convergence uniforme. Pour cela on s'intéresse à

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)$$

En dérivant

$$f_n'(x) = n^b(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = n^b x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

on obtient que la borne supérieure pour $f_n(x)$ *sur* $[0,1]$ *est atteinte en* $x_n = \frac{n}{n+1}$ *et elle vaut*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(x_n) = n^b \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) = \frac{n^b}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Or, $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e$, *donc*

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \sim_{n\to\infty} e\frac{n^b}{n+1} \to_{n\to\infty} 0$$

si et seulement si $b < 1$. *C'est á dire, la suite* $(f_n)_{n\geqslant 1}$ *converge uniformement si et seulement si* $b < 1$.

Exercice 7 Pour $x \geqslant 0$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n^{3/2}+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n$ converge simplement et uniformément sur $[0,+\infty[$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0,A]$, avec $A > 0$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n$ ne convergence pas normalement sur $[0,+\infty[$.
4. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n$ est une fonction continue $[0,+\infty[$.

1) Comme $x \geqslant 0$, *alors* $f_n(x) \geqslant 0$ *et, pour tout* x, $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n(x)$ *est une série alternée. De plus, pour tout* $x \in [0,\infty[$

1. $\frac{x}{n^{3/2}+x^2} \to 0$ *lorsque* $n \to \infty$.
2. $\left(\frac{x}{n^{3/2}+x^2}\right)_{n\geqslant 1}$ *est une suite décroissante,*

donc $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n(x)$ satisfait les hypothèses du critére de Leibniz. On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et que $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x}{(n+1)^{3/2}+x^2}$.
En dérivant

$$f'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)^{3/2} + x^2 - 2x^2}{((n+1)^{3/2} - x^2)^2} \tag{1}$$

on trouve que la borne supérieure pour $f_{n+1}(x)$ sur $[0,+\infty[$ est atteinte en $x_{n+1} = (n+1)^{3/4}$ et elle vaut

$$\sup_{x\in[0,\infty[} f_{n+1}(x) = f_{n+1}(x_{n+1}) = \frac{(n+1)^{3/4}}{(n+1)^{3/2} + ((n+1)^{3/4})^2} = \frac{1}{2(n+1)^{3/4}}.$$

Du coup,

$$\sup_{x\in[0,\infty[} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x\in[0,\infty[} |R_n(x)| \leqslant \sup_{x\in[0,\infty[} |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{2(n+1)^{3/4}},$$

et comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)^{3/4}} = 0$, on en déduit que la convergence est uniforme.

2) Grâce à (1), on sait que $f_n(x)$ est croissante sur $[0, n^{3/4}]$. Alors, pour tout $A \geqslant 0$ fixé, pour $n > A^{4/3}$, $f_n(x)$ est croissante sur $[0, A]$ et

$$\sum_{n>A^{4/3}} \sup_{x\in[0,A]} |f_n(x)| = \sum_{n>A^{4/3}} |f_n(A)| = \sum_{n>A^{4/3}} \frac{A}{n^{3/2} + A^2}$$

converge par équivalence à une série de Riemann convergente, car $\frac{A}{n^{3/2}+A^2} \sim_{n\to\infty} A\frac{1}{n^{3/2}}$.

3) Par contre

$$\sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x_n)| = \sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{n^{3/4}}{n^{3/2} + (n^{3/4})^2} = \sum_{n\geqslant 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{1}{2n^{3/4}}$$

diverge, car $\sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{1}{n^{3/4}}$ est une série de Riemann convergente.

4) Pour tout $B > 0$ fixé, on a que f_n est continue sur $[0, B]$ et la série converge uniformément. Donc un résultat du cours (passage á la limite de la continuité) nous dit que $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n f_n$ est une fonction continue sur $[0, B]$. On peut conclure que $S(x)$ est une fonction continue sur $[0,\infty[$ car B est arbitraire.

Exercice 8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformément sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifier chaque réponse.

1. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur $[a, b]$.
2. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformement $[a, +\infty[$.
3. $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
4. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = 0$
5. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$, alors $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est continue sur $[a, b]$
6. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $[a, b]$, alors $S(x)$ est dérivable sur $[a, b]$.

1) VRAI. La convergence uniforme entraîne la convergence simple (résultat du cours)

2) FAUX. Par exemple la série $\sum_{n\geqslant 0} x^n$ *converge uniformement sur* $[0,1/2]$, *mais non sur* $[0,+\infty[$.

3) FAUX. Par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge uniformement sur* $[0,1]$ *(en fait sur tout* $\mathbb{R}$*) mais ne converge pas normalement.*

4) VRAI. Ça découle directement de la définition de convergence uniforme d'une série.

5) VRAI. Par un résultat du cours, on sait que la limite uniforme de fonctions continues est continue.

6) FAUX. Le caractère dérivable ne passe pas à la limite.
Par exemple la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\sqrt{\frac{1}{n}+x^2}-\sqrt{\frac{1}{n+1}+x^2}\right)$ *converge uniformement sur* $[-1,1]$ *vers la fonction limite* $\sqrt{1+x^2}-|x|$ *qui n'est pas dérivable.*